08.09.17 Метрика однорідного – ізотропного простору (Фрідмана – Робертсона – Чокера)

$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,\gamma_{ij}\,dx^i dx^j$

масштабний фактор; γ_{ij} – метрика одиничної тривимірної сфери

Світ вважаємо плоским

t – власний час

Щоб досліджувати рух частинок в такому всесвіті:

Стала Хабла: $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$

Частинкою вважається галактика, і вони розбігаються

З усіх компонент $u^0 = 1$ $\frac{du^\beta}{ds} = 0$ і рівняння руху задовольняються автоматично!

Динаміка розширення всесвіту:

$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$ – рів-ня Ейнштейна

$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G \varepsilon}{3c^4} - \frac{\varkappa}{a^2}$ – р-ня Фрідмана

$\varkappa$ дає кривизну: для площини 0, для гіперболоїда -1

$$\dot{\varepsilon} + \frac{3\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) = 0$$

$$T^{ij} = \frac{1}{a^2}\gamma^{ij} p$$

$$p = p(\varepsilon)$$

$p = \frac{\varepsilon}{3}$ – релят. частинка

$p = -\varepsilon$ – вакуум

$\Rightarrow$ Різні рівняння стану

$$\frac{d\varepsilon}{p+\varepsilon} = -3d(\ln a)$$

$d\ln S$

ентропія

$$Sa^3 = const$$

Перепишемо рівняння Ейнштейна на горизонті чорної діри:

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2\sin^2\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{f} \end{pmatrix}$$

$$f(r) = 1 - \frac{r_g}{r}$$

$$r_g = a = \frac{2mG}{c^2}$$

$$R_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{f''}{2f} + \frac{f'}{2f} & \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta - r\cos\theta - f & 0 & 0 \\ \frac{1}{r}\operatorname{ctg}\theta - r\cos\theta - f & f + rf' - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin^2\theta(rf' + f - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{ff''}{2} \text{ or } -\frac{ff'}{r} & \end{pmatrix}$$

$$R = g^{ik} R_{ik} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 f') - \frac{2}{r^2}\frac{d}{dr}(r(1-f)) = 0$$

Отже проінтегрувати по r

$r^2 f' - 2r(1-f) = \text{const}$ і врахувавши умови на горизонті чорної дори

$C = -a$

$\boxed{a f'(a) = 1}$

$$\frac{1}{2} a f'(a) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} a f'(a)\, da = \frac{1}{2} da \to \frac{c^4}{G}\frac{1}{2} a f'(a)\, da =$$

$$= d\left(\frac{ac^4}{2G}\right)$$

$\shortparallel$ dE

$$dE = \frac{1}{4\pi} f'(a) \frac{l_p^2}{k_B} \frac{c^4}{G} \overbrace{d\left(\frac{k_B}{4}\frac{4\pi a^2}{l_p^2}\right)}^{\text{ентропія Бекенштейна}}$$

Планківська відстань

$$l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ см}$$

$$T = \frac{\hbar c}{4\pi k_B} f'(a) = \frac{1}{4\pi c}\frac{\hbar}{k_B} c^2 f'(a) \sim \frac{\hbar\omega}{c}\frac{1}{4\pi k_B}$$

Температура, що має тяжко що прикладається. (Температура Укру)

$dE = TdS$